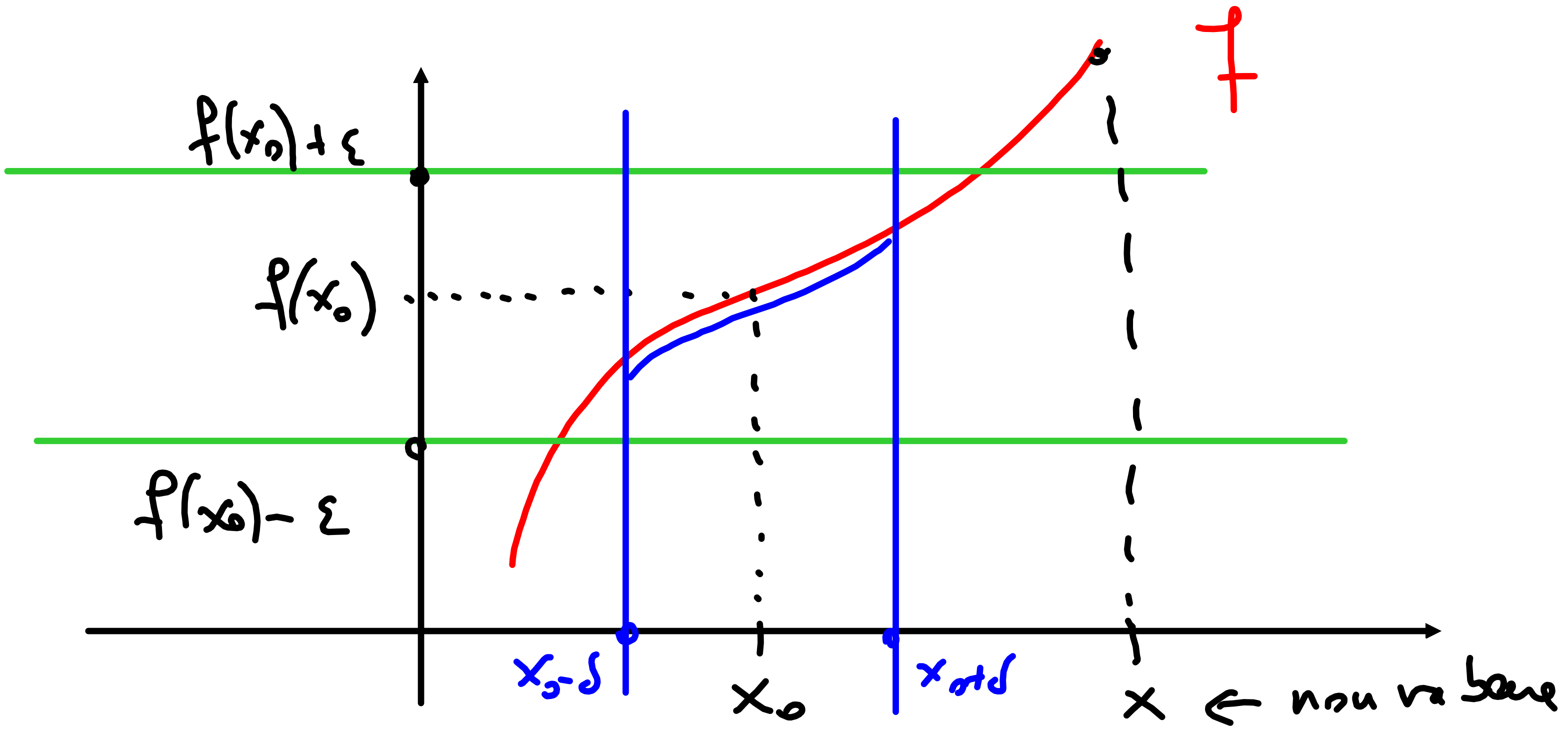
Continuità

<u>Def</u>: $A \subset \mathbb{R}$ $\quad f : A \to \mathbb{R}$

$x_0 \in A$. f si dice continua in x_0 se $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ t.c.

$x \in A$ e $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

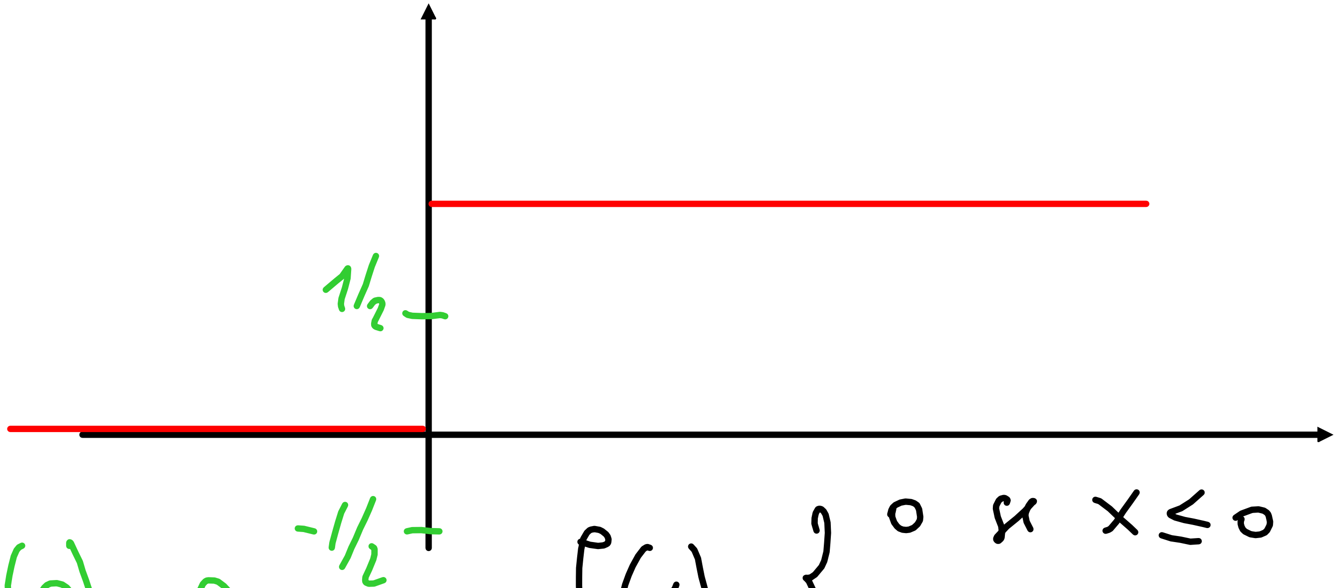


$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon \quad \text{vuol dire}$$

$$f(x_0)-\varepsilon < f(x) < f(x_0)+\varepsilon$$

$$|x-x_0|<\delta \iff x_0-\delta < x < x_0+\delta$$

Quali funzioni non sono continue?



$f(0) = 0$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

non è continua in $x_0 = 0$

se scelgo $\varepsilon = 5$ la definizione di continuità è verificata perché

$$0 - 5 < f(x) < 0 + 5 \quad \forall x$$

ma deve valere $\forall \varepsilon > 0$

scelgo $\varepsilon = \frac{1}{2}$

dovrei trovare $\delta > 0$ t.c. se

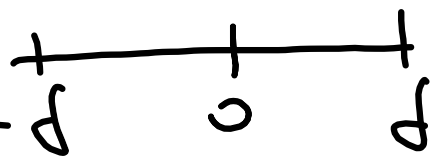
$$|x - \underset{x_0}{\underset{\uparrow}{0}}| < \delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x) - \underset{f(x_0)}{\underset{\uparrow}{0}}| < \varepsilon = \frac{1}{2}$$

non lo posso trovare perché

$|x - 0| < \delta$ vuol dire

$-\delta < x < \delta$



ma se $x \in (0,d)$

$$\Rightarrow f(x) = 1 > \frac{1}{2}$$

e invece dovrebbe essere

$$-\frac{1}{2} < f(x) < \frac{1}{2}$$

Teorema

Se f e g sono continue in x_0

allora

1) $f+g$ è continua in x_0

2) $f \cdot g$ è continua in x_0

3) $|f|$ è continua in x_0

Con questo teorema posso dire che tutti i polinomi sono continui.

$f(x) = x$ è continua.

$\Rightarrow$ $x^2 = x \cdot x$ è continua.

$x^3, x^4, \ldots, x^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

sono continue

$$p(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} +$$

$$+ \dots + a_1 x + a_0$$

è somma di funzioni continue.

Def.: $f : A \to \mathbb{R}$, $B \subset A$

diciamo che f è continua in B se f è continua in x_0 $\forall x_0 \in B$.

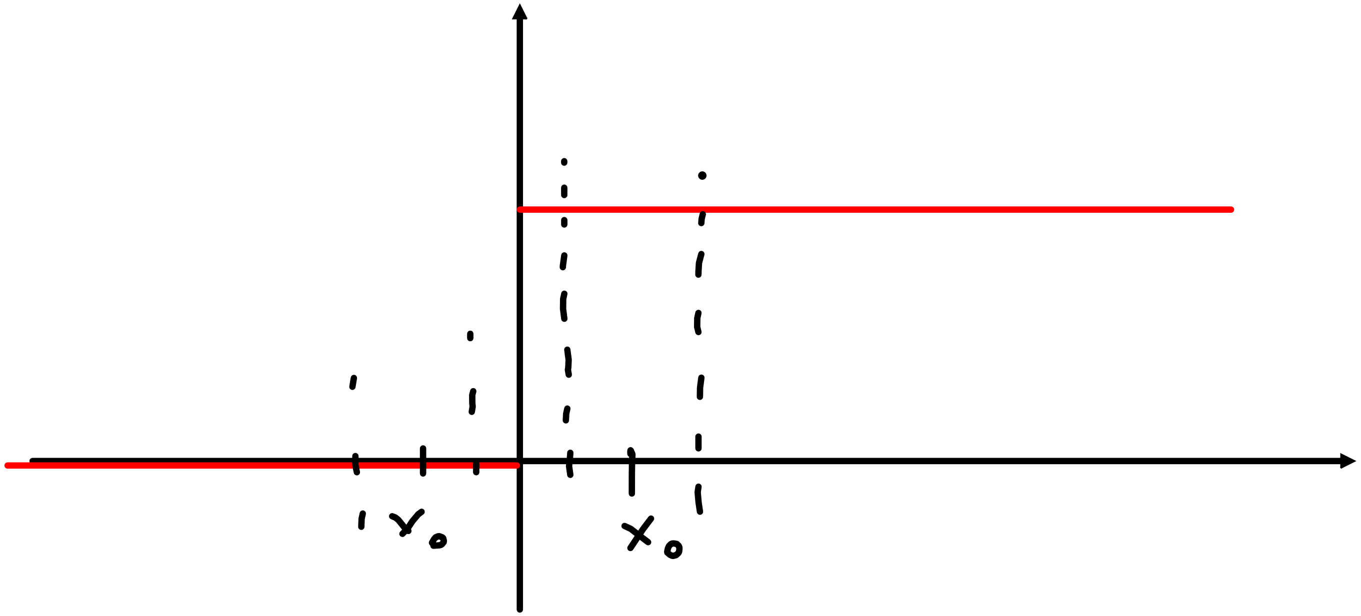
Se dico semplicemente
che f è continua
intendo continua in tutto
il suo insieme di definizione.

Es: $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$

è continua in $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

Es: $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$

è continua in tutto il suo insieme di definizione che è $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$


x_0
x_0

Permanenza del segno.

Teorema: $A \subset \mathbb{R}$ $f: A \to \mathbb{R}$

$x_0 \in A$. Se f è continua in x_0

e $f(x_0) > 0$ allora $\exists\, \delta > 0$

t.c. se $x \in A$ e $|x - x_0| < \delta$

allora $f(x) > 0$.

Stesso risultato se $f(x_0) < 0$.

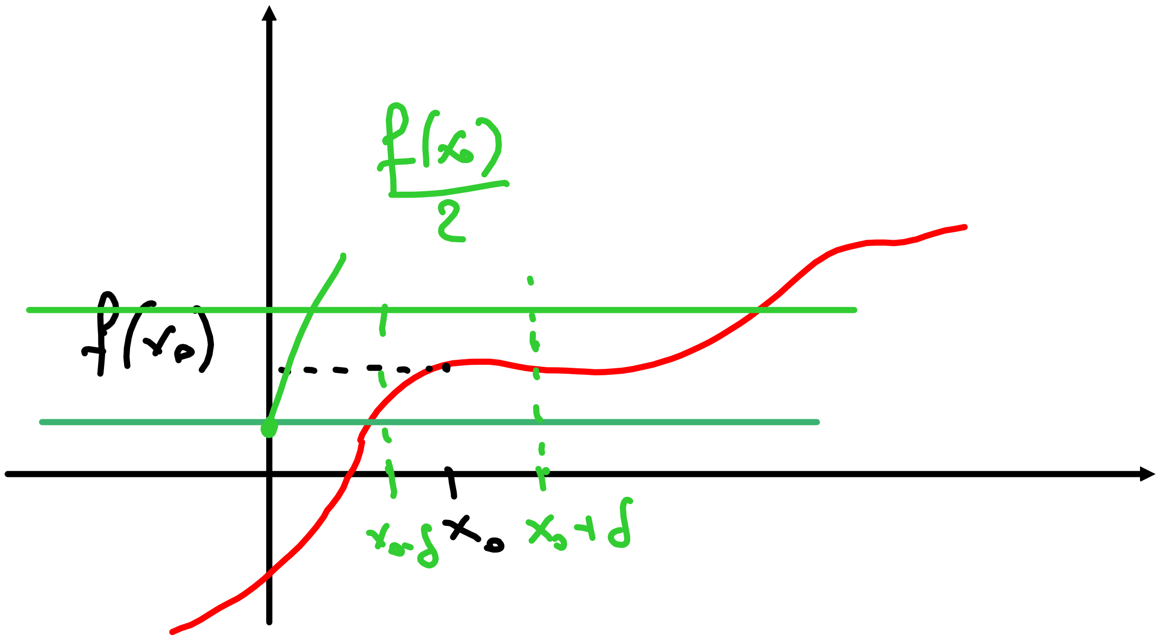
dim: $f(x_0)>0$

scelgo $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}$ nella definizione di continuità. Allora $\exists\, \delta>0$ t.c. se $x \in A$ e $|x-x_0|<\delta$ risulta $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

cioè $f(x_0)-\varepsilon < f(x) < f(x_0)+\varepsilon$

$$f(x) > f(x_0)-\varepsilon = f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} = \frac{f(x_0)}{2} > 0$$

$\square$



f(x₀)/2
f(x₀)
x₀-δ
x₀
x₀+δ

Corollario: Se f è continua in x_0 e $f(x_0) > M \in \mathbb{R}$ allora $\exists\ \delta > 0$ t.c. se $|x - x_0| < \delta$ e $x \in A$ allora

$$f(x) > M$$

dim: applico il teorema precedente a $g(x) = f(x) - M$. $\square$

Teorema: $A \subset \mathbb{R}$ $f : A \to \mathbb{R}$ $x_0 \in A$. Se f è continua in x_0 e $f(x_0) \neq 0$ allora $\frac{1}{f}$ è continua in x_0.

Oss: Il teorema sulla permanenza del segno mi permette di dire che $\frac{1}{f}$ è definito in un intervallo intorno a x_0

$$(x_0-\delta, x_0+\delta).$$

$\Rightarrow$ ha senso parlare di continuità in x_0.

Corollario: $A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$
$g: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$, f e g
continue in x_0 e $g(x_0) \neq 0$
allora $\dfrac{f}{g}$ è continua in x_0.

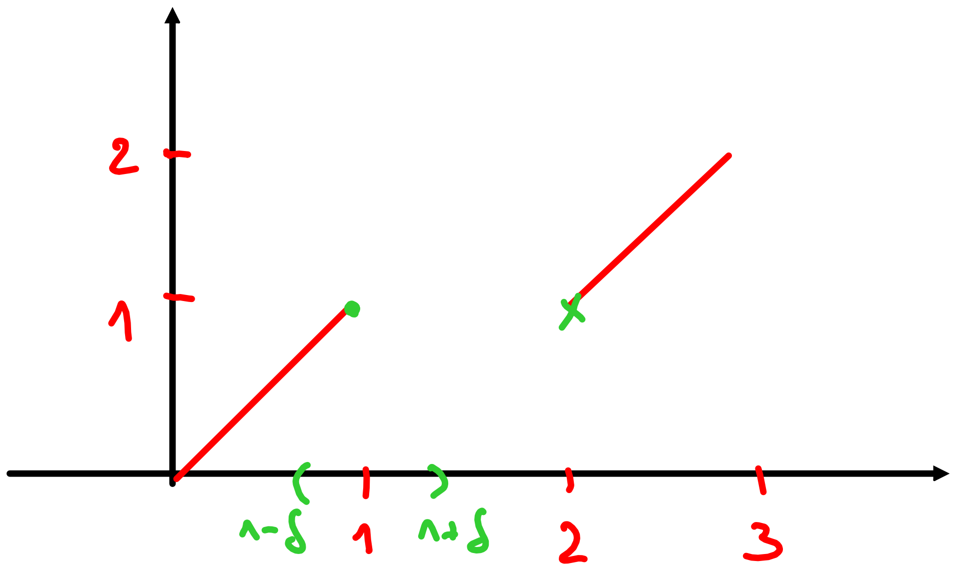
dim: $\dfrac{f}{g} = f \cdot \dfrac{1}{g}$. $\square$

Prop: $I \subset \mathbb{R}$ intervallo.
$f : I \to B$. Se f è continua in I e invertibile allora f^{-1} è continua in B.

L'ipotesi che il dominio sia un intervallo è necessaria.

Es: $f : [0,1] \cup (2,3] \longrightarrow [0,2]$

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } \ 0 \leq x \leq 1 \\ x-1 & \text{se } \ 2 < x \leq 3 \end{cases}$$



f è iniettiva? sì.

f è continua?

In $x_0 = 2$ f non è definita quindi non ha senso domandarsi se è continua.

f è continua in $x_0 = 1$?

devo verificare che $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$

t.c. se $|x - x_0| < \delta$ e $x \in A$

allora $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$A = [0,1] \cup (2,3]$

se scelgo δ piccolo (cioè < 1)

$\Rightarrow (1-\delta, 1+\delta) \cap A = (1-\delta, 1]$

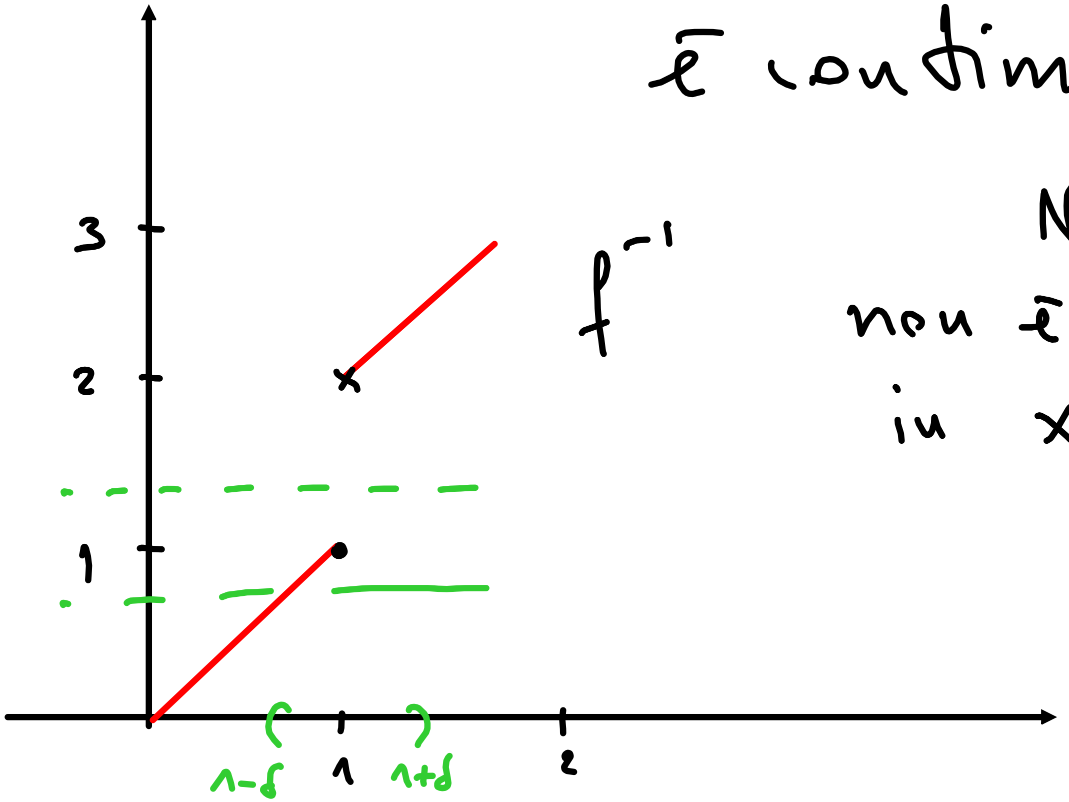
quindi non devo verificare
niente a destra di $x_0 = 1$.

$\Rightarrow$ f è continua in $x_0 = 1$.

f è surgettiva.

Chi è l'inversa?

è continua?



NO

non è continua

in $x_0 = 1$.

Continuità delle funzioni elementari

polinomi sono continui

funzioni razionali sono continue nell'insieme di definizione

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \qquad p, q \text{ polinomi}$$

$$f(x) = \frac{5x^2 + 7}{x^3 + 4x + 2}$$

Assumeremo che

e^x, $\sin x$, $\cos x$

sono continue

di conseguenza lo sono anche

$\log x$, $\arcsin x$, $\arccos x$

$\operatorname{tg} x$, $\operatorname{arctg} x$

Teorema: $f: A \to B$

$g: B \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$, $y_0 = f(x_0)$

Se f è continua in x_0 e g è continua in y_0 allora

$g \circ f$ è continua in x_0

Es: $e^{\sin x}$ è continua

$f(x) = \sin x \qquad g(y) = e^y$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) =$$

$$= e^{f(x)} = e^{\sin x}.$$

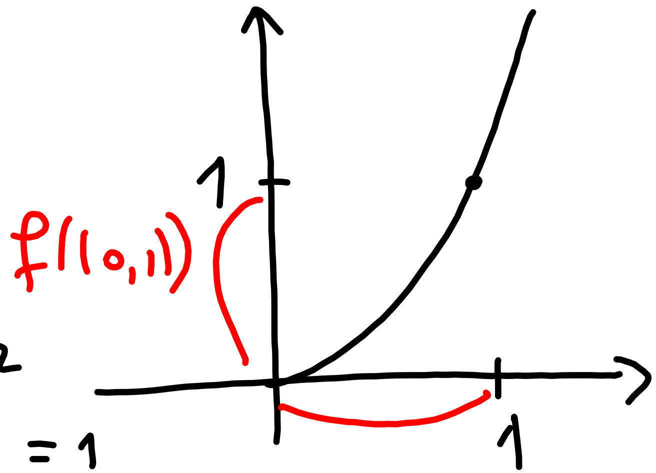
<u>Oss</u>: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$. Allora

$$\sup_{(a,b)}(f) = \sup_{[a,b]}(f)$$

$$\inf_{(a,b)}(f) = \inf_{[a,b]}(f)$$

Es: $f(x) = x^2$

$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$



$$\sup_{[0,1]} f(x) = \max_{[0,1]} f = 1^2 = 1$$

$$\sup_{(0,1)} f(x) = \sup\big(f((0,1))\big) = \sup\,(0,1) = 1$$

non è un max.

Teorema degli zeri

$f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua.

Se $f(a)\cdot f(b)<0$ allora

$\exists\, c \in (a,b)$ t.c. $f(c)=0$.

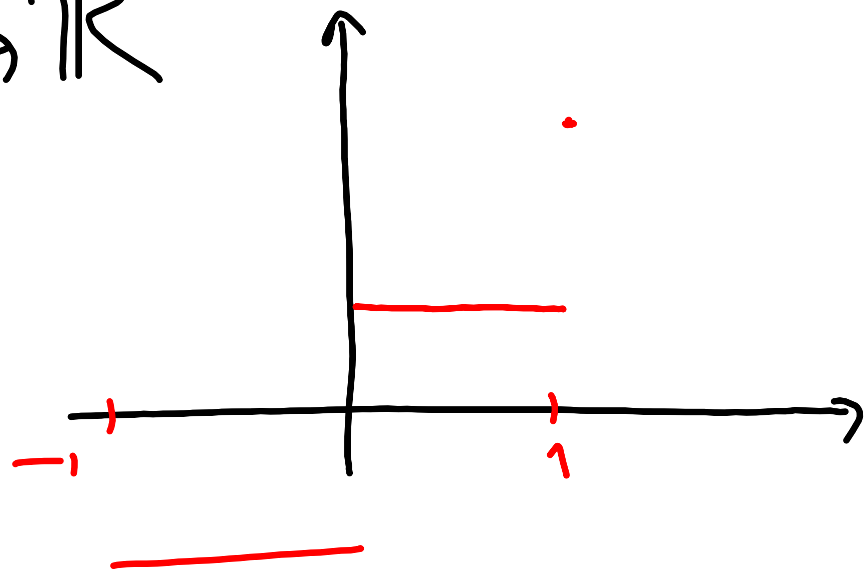
L'ipotesi di continuità è necessaria.

$$f(x) = [x] + \frac{1}{2}$$

$$f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(-1) = -\frac{1}{2}$$

$$f(1) = \frac{3}{2}$$



f assume valori discordi agli estremi ma non si annulla mai.

Teorema di valori intermedi

$I \subset \mathbb{R}$ intervallo $f : I \to \mathbb{R}$ continua. Allora

$f(I)$ è un intervallo.